



Generation and Characterization of Self-Similar Teletraffic Using a New
Model of Piecewise Affine Chaotic One-dimensional Map

Ginno Millán

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

March 16, 2021

Generación y Caracterización de Teletráfico Autosimilar Empleando un Nuevo Modelo de Mapa Caótico Unidimensional Afín por Tramos

G. Millán^{a,1*}

^a Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Santiago de Chile, Avda. Ecuador 3519, Estación Central, Santiago, Chile.

Resumen

Se presenta una extensión cualitativa y cuantitativa de los modelos caóticos utilizados para la generación y caracterización de tráfico autosimilar con dependencia de largo alcance (LRD) en redes de computadoras de alta velocidad, a través de la formulación de un nuevo modelo basado el uso de mapas caóticos afines por tramos (PWA) unidimensionales. En base a la desagregación de las series temporales generadas por el modelo se propone una explicación para el comportamiento registrado por los valores del exponente de Hurst (H) en series de datos autosimilares de segundo orden estacionarias y se demuestra la factibilidad de su control a partir de la variación de los parámetros del modelo propuesto.

Palabras Clave:

Autosimilitud, Caos, Dependencia de largo alcance (LRD), Exponente de Hurst (H), Mapas caóticos, Modelado de tráfico.

1. Introducción

El comportamiento caótico es un paradigma intermedio cuya existencia entrelaza dos concepciones científicas y filosóficas del universo: el conocimiento absoluto regido por el determinismo y el desconocimiento total gobernado por la aleatoriedad. De forma paradójica y en estricta atención a la existencia de ambos dogmas, una aseveración que resulta tan natural como la anterior, revela la principal falencia en el análisis de comportamientos sistémicos; el uso ampliado de dicotomías para caracterizarlos.

Es en el escenario anterior que la teoría del caos, definida por Kellert (1993) como el estudio cualitativo de la conducta periódica e inestable perceptible en los sistemas dinámicos deterministas no lineales irrumpe estableciendo a la impredecibilidad como rasgo fundamental inherente a la experiencia común (Male, 1998). Por lo tanto, la teoría del caos en vez de tratar de entender la conducta sistémica desde un punto meramente cuantitativo con el objetivo de determinar con la mayor exactitud posible sus estados futuros, se ocupa de entender sus conductas a largo plazo explorando en la búsqueda de patrones bajo una filosofía holística, en vez de sesgar su espectro al reductivismo al que, necesariamente, conllevan las anteriormente citadas concepciones.

Del conjunto de ideas expuestas y en total atención al ánimo y objetivos de esta investigación, no resulta posible; práctico por lo demás, abordar la situación problemática de la caracterización del comportamiento de los sistemas bajo estudio considerando toda la amplitud conceptual de la teoría del caos. Por este preciso motivo, se acepta que caos es el fenómeno por el cual sistemas dinámicos

no lineales de bajo orden exhiben complejidad y en apariencia un comportamiento aleatorio (Erramilli *et al.*, 1994a). Estos sistemas son de bajo orden por cuanto es posible describirlos mediante un número reducido de parámetros y variables; dinámicos porque el tiempo hace evolucionar sus variables y, deterministas, dado que los valores de estas variables pueden, para cualquier instante de tiempo futuro, ser determinados a partir de sus valores anteriores a partir de un conjunto de leyes dinámicas. Por último, estas leyes que gobiernan la evolución temporal son no lineales por cuanto incumplen el principio de superposición (Erramilli *et al.*, 1994b).

Es necesario aclarar, en este punto, que los sistemas caóticos, a diferencia de los sistemas dinámicos convencionales, poseen una naturaleza intrínsecamente impredecible aun cuando el conjunto de sus leyes dinámicas subyacentes sean de carácter determinista. Además, lo anterior no debe llevar a la creencia generalizada de que el caos implica necesariamente impredecibilidad, puesto que ello no es correcto en atención a las dos principales fuentes de este fenómeno, a saber; la inexactitud de los datos iniciales y su origen como característica inherente a ciertas relaciones no lineales entre variables numéricas (Mahner and Bungle, 2000). De esta manera, en completa atención a lo anterior, se establece que el caos como propiedad sistémica se refiere a la sensibilidad a las condiciones iniciales, esto es; dadas dos trayectorias arbitrariamente cercanas en el plano de fases, su comportamiento será exponencialmente divergente a un ritmo dado por el exponente global de Lyapunov.

Resulta paradójico que un sistema en esencia determinista; con leyes dinámicas deterministas, exhiba un comportamiento caótico, puesto que la premisa básica que gobierna todo sistema dinámico

* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: g1nno.millan@usach.cl (G. Millán).

es que el conocimiento de sus condiciones iniciales hace posible la determinación de su comportamiento futuro. Se destaca que, en la práctica, las condiciones iniciales solo pueden ser especificadas con precisión finita. Sin embargo, las incertidumbres introducidas en las condiciones iniciales, en el caso de los sistemas caóticos, se amplían exponencialmente, lo cual resulta, toda vez que explica, lo impredecible de sus comportamientos. Es esta singularidad la que se encuentra asociada a la implicancia de que el caos supone la posibilidad de realizar buenas predicciones al corto plazo, pero imposibilita predicciones prácticas al largo plazo (Luengo, 2006). De esta manera se explica que sistemas muy simples, de inclusive tan solo un grado de libertad como los reportados por May (May, 1974; May, 1976), sean capaces de dar origen a comportamientos sorprendentemente complejos.

Con frecuencia la noción de caos aparece ligada a la noción de fractal introducida por Mandelbrot (Mandelbrot, 1975) y, a pesar que a la fecha, no existe una demostración formal para ello, todo parece indicar que las propiedades de las fractales son inherentes a los sistemas caóticos, hecho por el cual, tan solo en apariencia, el caos y los objetos fractales son conceptos independientes y no poseen vinculación alguna (Erramilli *et al.*, 1994b). Sin embargo, no sin antes recordar que el concepto de dimensión fractal logra generalizar el de dimensión a través de la introducción de valores no enteros para su especificación, hecho ampliamente reportado en Mandelbrot (1983) tanto en el campo conceptual como de sus aplicaciones; sorprendentemente, los sistemas caóticos tienden a evolucionar en su espacio de fases hacia un atractor extraño, que es una región acotada que presenta dimensión no entera, es decir, dimensión fractal. Puede entonces argumentarse que los atractores extraños poseen naturaleza fractal y exhiben complejidad sobre diferentes escalas temporales y/o espaciales. Luego, por todo lo anterior, es posible afirmar que los conceptos de la teoría fractal son factibles de ser utilizados para describir las características de corte evolutivo de los sistemas caóticos y estos, a su vez, pueden ser convenientemente utilizados para generar estructuras fractales, implicando, por lo tanto, la autosimilitud y, con ello, su parámetro de caracterización; es decir, el exponente de Hurst (H).

Cabe señalar que al no existir una definición sencilla para las fractales, generalmente se recurre a definir las en términos de sus principales atributos, a saber: el lento decaimiento de la varianza, los momentos de orden infinito, la autosimilitud, la dependencia de largo alcance (LRD), la distribución de cola hiperbólica de la densidad temporal que caracteriza arribos sucesivos, el ruido $1/f$, y la antes mencionada dimensión no entera (Willinger *et al.*, 1996; Resnick, 1997; Willinger, 2000; Park and Willinger, 2000; Floyd and Paxson, 2001; Sheluhin *et al.*, 2007; Millán *et al.*, 2010). Es la presencia de dichas características en los flujos de tráfico de las actuales redes de computadoras de alta velocidad el fin último de toda la discusión planteada.

El comportamiento autosimilar LRD de los flujos de tráfico en los actuales sistemas de comunicaciones y sus aplicaciones, es un hecho extensamente reportado en la literatura para topologías con diferentes niveles de coberturas (Leland, *et al.*, 1994; Paxson and Floyd, 1995; Crovella and Bestavros, 1997; Arlitt and Jin, 2000), tecnologías de transmisión (Ge *et al.*, 2000; Liang, 2002; Huang *et al.*, 2005; Fantacci and Tarchi, 2006; Huang *et al.*, 2007; Maier, 2008), protocolos de control y de señalización (Duffy *et al.*, 1994; Pruthi and Erramilli, 1995) y aplicaciones de audio y video VBR (Garrett and Willinger, 1994; Beran *et al.*, 1995; Tsybakov and Georganas, 1997; Yellanki, 1999). Del mismo modo, el problema del modelado del tráfico de entrada a las actuales redes es un tema ampliamente cubierto en la literatura que ha resultado en una gran

variedad de modelos, entre los cuales se encuentran, sin ánimo de listarlos exhaustivamente; procesos de Poisson con conmutación generalizada (Tran-Gia, 1983), procesos de Markov modulados por Poisson (Heffes and Lucantoni, 1986), procesos de Poisson conmutados (Rossiter, 1988), procesos fractales puntuales (Ryu and Lowen, 1996), procesos con renovación fractal alternante y con renovación fractal alternante extendida (Willinger *et al.*, 1997; Yang, 2001), procesos basados en el iterar de mapas caóticos intermitentes (Erramilli *et al.*, 1994a; Erramilli *et al.*, 1994b; Ding and Yang, 1995; Mondragón *et al.*, 2000; Arrowsmith *et al.*, 2004) y los tradicionales procesos de ruido y de movimiento gaussiano fraccional (Mandelbrot and Van Ness, 1968; Mandelbrot, 1971; Davies and Harte, 1987; Paxson, 1987).

Sin embargo, y a pesar de todos los esfuerzos subyacentes tras cada metodología antes expuesta, se presentan dos problemáticas inherentes a la generación de tráfico autosimilar LRD relacionada con el exponente de Hurst, a saber; su grado de representatividad como único parámetro utilizado para caracterizar el rendimiento de los sistemas de colas, y el comportamiento de su valor cuando se realiza la desagregación de las series temporales autosimilares de segundo orden estacionarias generadas dentro del intervalo de interés $0.5 < H < 1$.

Al respecto, en Neidhardt and Wang (1998), Gao and Rubin (1999), Ritke *et al.* (2001) y Gao and Rubin (2001) se presentan de manera aislada ambas situaciones y sus implicancias. Ahora, puesto que ambas situaciones obedecen a un común denominador, el exponente de Hurst, esta investigación conviene referirse a ellas y en particular al conjunto de sus repercusiones, bajo el nombre de *problemática de la localidad del exponente de Hurst*.

Luego, en atención al conjunto existente de modelos de tráfico que utilizan como base mapas caóticos, se presenta una extensión de los mismos incorporando los mapas caóticos afines por tramos unidimensionales con el objetivo de desarrollar un nuevo modelo de tráfico que proporcione una explicación a la problemática de la localidad del exponente de Hurst y mitigue la imprecisión a la que conlleva en el análisis de series temporales representativas de las trazas de tráfico reales capturadas en una red.

2. Relación entre Mapas Caóticos y Tráfico Autosimilar

Los mapas caóticos como modelos de fuentes de tráfico fueron originalmente propuesto en Erramilli *et al.* (1994a) sobre la base del trabajo pionero de Wang (1998).

Para entender la operación de un mapa caótico en términos de la generación de tráfico, puede considerarse, sin ninguna pérdida de generalidad, que un mapa caótico es una variante del modelo de tráfico On/Off desarrollado por Willinger *et al.* (1997), con la diferencia fundamental que su base se encuentra en las dinámicas discretas que rigen el comportamiento del sistema a representar.

Luego, dado un sistema caótico caracterizado por una función no lineal $f: D \rightarrow D$, con $D \subseteq \mathbb{R}^m$, este evoluciona de acuerdo con la ecuación del proceso que para un sistema discreto está dada por

$$\mathbf{x}[k] = f(\mathbf{x}[k-1], u[k-1]; \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}[k], \quad (1)$$

con $\mathbf{x}[k]$ vector de estado, $u[k]$ excitación de entrada, $\mathbf{v}[k]$ vector de ruido del proceso y $\boldsymbol{\theta}$ vector de parámetros del sistema.

En general, el estado del sistema descrito por (1) no puede ser observado de manera directa, por lo cual se requieren muestras del mismo, las cuales se obtienen mediante la aplicación de un cierto proceso de medida definido por

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{g}(\mathbf{x}[k]) + \mathbf{w}[k], \text{ con } k = 0, \dots, N, \quad (2)$$

donde \mathbf{g} es la función de medida (que puede ser conocida o no), $\mathbf{y}[k]$ el vector de medidas y $\mathbf{w}[k]$ el vector de ruido de medida.

Un mapa caótico es una aplicación $f: X \rightarrow Y$ que asocia a cada $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m$ un único $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^q$, siendo X el dominio de f e Y el conjunto de llegada de f .

Sea una aplicación $f: D \rightarrow D$, con $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Un mapa iterado es el sistema formado por el conjunto de m ecuaciones dado por

$$\mathbf{x}[n] = f(\mathbf{x}[n-1]; \boldsymbol{\theta}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) muestran que un mapa caótico es simplemente una clase de sistema discreto autónomo.

Puesto que en este trabajo la atención se concentra en los mapas caóticos unidimensionales, es conveniente establecer su definición como sigue. Un mapa caótico unidimensional es una aplicación $f: D \rightarrow D$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, tal que

$$x[n] = f(x[n-1]; \theta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

La definición del caos como propiedad de un sistema se refiere a su sensibilidad a las condiciones iniciales. Luego, considerando un mapa caótico definido por $x_{n+1} = f(x_n)$ y dos trayectorias en su plano de fases que presentan condiciones iniciales casi idénticas; x_0 y $x_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, su sensibilidad a las condiciones iniciales está dada por la expresión

$$|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| = \varepsilon \exp[N\lambda(x_0)], \quad (5)$$

donde f^N es la N -ésima iteración del mapa y $\lambda(x_0)$ es el exponente global de Lyapunov que describe la divergencia exponencial. Para que el mapa sea caótico, su exponente global de Lyapunov debe ser positivo para la mayoría de los x_0 (Schuster and Just, 2005).

Luego, (5) expresa el hecho de que puntos que comienzan con condiciones iniciales similares, presentan un desarrollo futuro a lo largo de trayectorias exponencialmente divergentes.

Sea una aplicación $f: I \rightarrow I$, con $I \in \mathbb{R}$. Se dice que $f(x)$ es un mapa afín por tramos (PWA) unidimensional, si existe un número finito de puntos $e_0 < \dots < e_M$, de forma que el intervalo $I = [e_0, e_M]$ puede ser subdividido en M intervalos menores $E_i = [e_{i-1}, e_i]$, con $i = 1, \dots, M-1$ y $E_M = [e_{M-1}, e_M]$, en los cuales el comportamiento de $f(x)$ es afín. Matemáticamente un mapa PWA unidimensional queda completamente definido a través de

$$f(x) = \sum_{i=1}^M (a_i x + b_i) \Psi_{E_i}(x), \quad (6)$$

donde Ψ representa la función característica o indicadora, la cual se define como: sea una aplicación $\Psi_R: D \rightarrow \{0, 1\}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que Ψ_R es la función característica de la región R si

$$\Psi_R = \begin{cases} 1, & x \in R \\ 0, & x \notin R \end{cases}. \quad (7)$$

En otras palabras $f(x)$ posee un comportamiento semejante en cada uno de los M intervalos E_i en los cuales se divide el intervalo de llegada I , que si se observa su comportamiento en el intervalo I original. Este hecho evidencia la autosimilitud de mapa.

Un mapa unidimensional compuesto por dos intervalos dentro de los cuales la variable de estado, x_n , evoluciona en el tiempo de acuerdo con dos funciones f_1 y f_2 que satisfacen (5) puede, a partir del concepto entregado por (4), escribirse como

$$x_{n+1} = \begin{cases} f_1(x_n), & 0 \leq x_n \leq d \\ f_2(x_n), & d < x_n \leq 1 \end{cases}. \quad (8)$$

Esta notación simplifica la idea de concebir un proceso para la generación de tramas considerando que la fuente emisora oscila entre dos estados; uno pasivo y otro activo, al igual que ocurre en los modelos On/Off, en los cuales se encuentra en un determinado instante de tiempo, n , en función de si el valor de x_n , la variable de estado, se encuentra por sobre o por debajo de un cierto umbral de activación d . Puede adoptarse que la región del mapa cubierta por la función $f_1(x_n)$ denota el estado pasivo (Off) y la región cubierta por la función $f_2(x_n)$ el estado activo (On), es decir

$$x_{n+1} = \begin{cases} \text{Off: } f_1(x_n), & 0 \leq x_n \leq d \\ \text{On: } f_2(x_n), & d < x_n \leq 1 \end{cases}. \quad (9)$$

lo cual se esquematiza en la Figura 1.

Conviene señalar que los estados silentes (Off) son posibles de ser interpretados bien como periodos en los cuales efectivamente una fuente no genera tráfico, bien como los tiempos entre arribos de tramas sucesivas. Para esta investigación se opta por la primera interpretación. Luego, considerando la permanencia del mapa en uno u otro de los estados definidos, la evolución del proceso de llegada de tramas queda descrita a partir de la función indicadora (7), la cual para efectos de consistencia con la notación empleada en (8), puede ser nuevamente escrita como

$$y_n = y(x_n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_n \leq d \\ 1, & d < x_n \leq 1 \end{cases}. \quad (10)$$

En Samuel *et al.* (1998) se interpreta el modelo descrito por (8) y (10) como compuesto por dos capas dinámicas; una oculta dada por x_n de (8) y una visible especificada por y_n de (10).

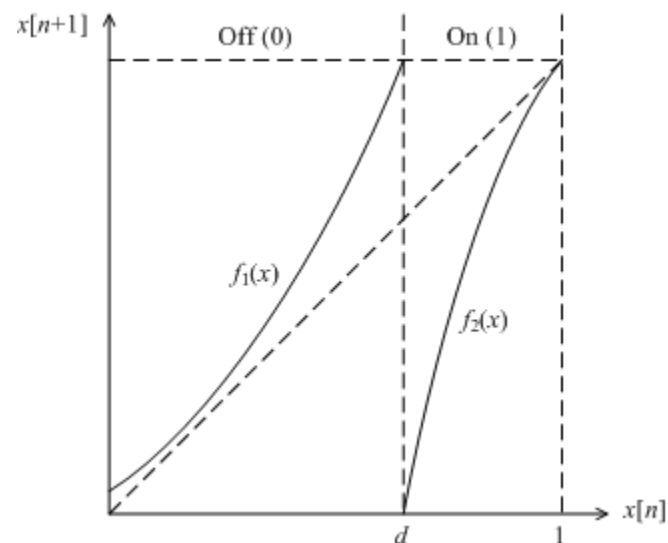


Figura 1: Aspecto de un mapa caótico generador de tráfico. Cuando $x_n > d$ la fuente está activa, generando tráfico con cada iteración en la región ($y_n = 1$).

De especial interés resulta observar que el comportamiento de una trayectoria sobre la cual evoluciona el mapa definido por (8) es tal que no tiene porqué visitar las dos regiones de su espacio de fases con igual frecuencia; más aun, no existe razón alguna para considerar, inclusive dentro de la región propia del atractor, una función de densidad de probabilidad uniforme de las secuencias generadas, por lo tanto resulta razonable preguntarse tanto por la frecuencia con que una determinada trayectoria visita cada región del mapa en un intervalo de observación de n iteraciones así como por la forma de calcular esta función de densidad de probabilidad a partir de una determinada condición inicial x_0 .

Al respecto, la respuesta para ambas interrogantes se halla en la distribución de densidad de estados del mapa (8), designada por $\rho_n(x)$, definida por (Morita, 1996)

$$\rho_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta[x - x_n(i)], \quad (11)$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac y además la evolución de $\rho_n(x)$ está regida por la ecuación de Frobenius-Perron (Pikovsky and Kurths, 1994; Just, 1995; Klages, 2002),

$$\rho_{n+1}(x) = \int \delta[x - f_n(y)] \rho_n(y) dy. \quad (12)$$

Para un mapa unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, definido sobre el intervalo unitario, en Schuster and Just (2005) se demuestra que (11) está dada por

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta[x - f^i(x_0)]. \quad (13)$$

Si $\delta(x)$ no depende de x_0 el sistema es llamado ergódico, luego este hecho permite escribir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g(x_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N g[f^i(x_0)] = \int_0^1 \rho(x) g(x) dx. \quad (14)$$

Como $\rho_n(x)$ tiene que ser estacionaria debido a (14) (Schuster and Just, 2005), lo cual solo tiene sentido si $f(x)$ es independiente del tiempo n , se la llama densidad invariante de $f(x)$, y describe la densidad de iteraciones de x_n en el intervalo $]0, 1[$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, $\rho_n(x)$ es una autofunción del operador de Frobenius-Perron con autovalor 1, y por ello se verifica que (Erramilli et al., 1994a; Erramilli et al., 1994b; Erramilli et al., 1995)

$$\rho(x) = \int_0^1 \delta[x - f(y)] \rho(y) dy. \quad (15)$$

El origen del tratamiento de los flujos de tráfico considerando su naturaleza autosimilar LRD recae en la necesidad de capturar sus fluctuaciones considerando diferentes escalas temporales, con el objetivo de realizar pronósticos asertivos del rendimiento de los sistemas de comunicaciones. Al respecto, la autosimilitud aporta la parsimonia para especificar detalles estadísticos de las variables desde un conjunto mínimo de parámetros de modelado, en tanto que un modelo basado en la teoría de complejidad la robustez necesaria para cohesionar dichos parámetros con información.

3. Definición del Modelo Caótico Propuesto

A partir del modelo de mapa caótico de doble intermitencia de Pruthi and Erramilli (1995), dado por

$$x_{n+1} = \begin{cases} \varepsilon_1 + x_n + c_1 x_n^{m_1}, & 0 < x_n \leq d \\ -\varepsilon_2 + x_n - c_2 (1 - x_n)^{m_2}, & d < x_n < 1 \end{cases}, \quad (16)$$

donde

$$c_1 = \frac{1 - \varepsilon_1 - d}{d^{m_1}}, \quad (17)$$

$$c_2 = \frac{d - \varepsilon_2}{(1 - d)^{m_2}} \quad (18)$$

y función característica dada por (10). Si $m_2 = 1$ y $\varepsilon_2 = 0$, de (16) se obtiene por deducción el modelo de mapa caótico intermitente no lineal de Erramilli *et al.* (1994a), definido por

$$x_{n+1} = \begin{cases} \varepsilon + x_n + c x_n^m, & 0 < x_n \leq d \\ (x_n - d) / (1 - d), & d < x_n < 1 \end{cases}, \quad (19)$$

donde $c = (1 - \varepsilon - d) / d^m$, con $\varepsilon \ll d$.

Los parámetros del mapa (ε, m, d) se utilizan para controlar la probabilidad de permanencia del mapa en el estado inactivo, la carga de tráfico; es decir, la tasa media de arribo de tramas, y el grado de autosimilitud. Concretamente, el ajuste de ε incide sobre la probabilidad de permanencia de las iteraciones del mapa en el estado inactivo, mientras que la carga de tráfico depende de los parámetros m y d (Aklilu *et al.*, 2001; Samuel *et al.*, 1997).

La condición $\varepsilon \ll d$ queda bien definida si $\varepsilon = 0$, lo cual incide en el control del límite del rango de escalas temporales sobre las cuales se observa LRD. En Aklilu *et al.* (2001) se demuestra que si $\varepsilon = 0$, el tiempo de permanencia puede tener cualquier longitud, pero a medida que ε se incrementa sobre 0, el tiempo de escape de la región tiende a un límite fijo superior.

Considerar $m = 1$ con el objetivo de disminuir el grado de la función que caracteriza el estado inactivo del mapa implica que se genere tráfico con dependencia de corto alcance (SRD), lo cual se verifica a partir de $H = (3m - 4) / (2m - 2)$, con $m = \max\{m_1, m_2\}$ (Mondragón, 1999). De hecho, $m = 1$ implica $H = 0.5$. En otras palabras se produce un decaimiento geométrico para las regiones del mapa, lo cual equivale a tráfico no correlacionado; es decir, se genera tráfico con SRD.

Finalmente, el modelo de mapa caótico propuesto junto con su función indicadora vienen dados por

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + x_n^m, & 0 \leq x_n \leq d \\ (x_n - d) / d^m, & d < x_n \leq 1 \end{cases}, \quad (20)$$

e

$$y_n = y(x_n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_n \leq d \\ 1, & d < x_n \leq 1 \end{cases}, \quad (21)$$

respectivamente.

Reescribiendo (20) en la forma

$$x_{n+1} = \begin{cases} f_1(x) = x_n + x_n^m, & 0 \leq x_n \leq d \\ f_2(x) = (x_n - d) / d^m, & d < x_n \leq 1 \end{cases}, \quad (22)$$

del desarrollo de (14) aplicando (21), se obtiene

$$\rho(x) = \int_0^d \delta[x - f_1(y)] \rho(y) dy + \int_d^1 \delta[x - f_2(y)] \rho(y) dy, \quad (23)$$

ecuación que posee solo una solución físicamente relevante que se obtiene de $z = 1$ (Schuster and Just, 2005). Luego.

$$\rho(x) = \frac{\rho[f_1^{-1}(x)]}{|f_1'[f_1^{-1}(x)]|} + \frac{\rho[f_2^{-1}(x)]}{|f_2'[f_2^{-1}(x)]|}, \quad (24)$$

donde f_i' representa la primera derivada de f_i .

La carga de tráfico se obtiene a partir de la densidad invariante (14) como sigue (Mondragón *et al.*, 2000)

$$\rho(x) = \int_0^1 \delta[x - f(y)] \rho(y) dy = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho(y_i)}{f'(y_i)}, \quad (25)$$

donde $y_i = f_i^{-1}(x)$, $i = 1, 2$ son las funciones parciales inversas de f en los intervalos $[0, d]$ y $[d, 1]$, respectivamente. La carga está dada por la probabilidad de comenzar en la región activa, es decir, integrando $\rho(x)$ desde $x = d$ hasta $x = 1$ (ver Figura 1).

4. Resultados Experimentales

El comportamiento autosimilar LRD del tráfico generado por el modelo propuesto se verifica a través del cálculo del exponente de Hurst empleando el análisis de rango re-escalado (R/S) y el análisis de varianza agregada (Var) (Rose, 1996; Tan, 1996; Gao, 2000). En el análisis R/S el valor de H se obtiene directamente de la pendiente del gráfico log-log de H versus el nivel de agregación mientras que en análisis Var se obtiene de la relación $H = 1 - \beta/2$, con $0 < \beta < 1$ (Stallings, 2004).

En esta primera etapa de la investigación no está contemplada la generación de tráfico en línea por enfocarse toda la atención en validar el modelo propuesto empleando simulaciones. Para ello se programan todos los algoritmos necesarios en lenguaje MATLAB y se realizan experimentos numéricos para calcular H tanto para series de tráfico generadas directamente por el modelo, como para series de tráfico desagregadas, generadas a partir de las primeras.

En la Tabla 1 se especifican dos valores para el parámetro m manteniendo la cantidad de iteraciones, N , y el parámetro d fijos. Estos valores dan origen a los mapas caóticos mostrados en las Figuras 2 y 3, según lo especifica la Tabla 1, y donde se muestra gráficamente el comportamiento de x_{n+1} e y_n . Con respecto a la gráfica de la función indicadora del mapa de la Figura 2, se aclara que se muestra hasta la iteración $N = 80$ puesto que tan solo hasta $N = 51$ el mapa que genera tráfico alterna entre 0 y 1 resultando el resto de las iteraciones en $y_n = 0$.

La Tabla 2 muestra diferentes experimentos numéricos en los cuales se varían los parámetros m y d considerando una cantidad fija de $N = 1000$ iteraciones para obtener H .

En la Tabla 3 se muestran valores de H para secuencias de tráfico aleatorias extraídas de las series originales empleadas para formular la Tabla 2. Estas secuencias aleatorias se forman a partir de extraer la cantidad de muestras especificada en la columna N_A y luego se analizan tal y como muestras de tráfico directamente generadas por modelo caótico.

El procedimiento antes descrito se conoce con el nombre de desagregación de series temporales.

La Figura 4 muestra el aspecto gráfico del tráfico generado para el caso en que $N = 1000$, $d = 0.5$ y $m = 2$ (ver Figura 2).

Tabla 1: Especificación de parámetros del modelo.

N	d	m	Se muestra en
1000	0.5	1	Figura 2
		2	Figura 3

Tabla 2: Especificación de valores de H para series de tráfico.

N	d	m	H (R/S)	H (Var)
1000	0.5	1	0.50	0.42
		1.2	0.51	0.46
		1.4	0.54	0.50
		1.6	0.68	0.58
		1.8	0.73	0.68
		2	0.87	0.78
	0.3	1	0.50	0.44
		1.2	0.51	0.47
		1.4	0.61	0.56
		1.6	0.72	0.65
		1.8	0.78	0.72
		2	0.90	0.82
	0.1	1	0.51	0.44
		1.2	0.53	0.50
		1.4	0.66	0.56
		1.6	0.75	0.65
		1.8	0.81	0.72
		2	0.92	0.82

Tabla 3: Especificación de valores de H para series desagregadas.

N	N_A	d	m	H (R/S)	H (Var)
1000	500	0.5	1	0.42	0.37
			1.2	0.45	0.43
			1.4	0.51	0.48
			1.6	0.55	0.52
			1.8	0.65	0.58
			2	0.72	0.66
		0.3	1	0.44	0.38
			1.2	0.47	0.45
			1.4	0.53	0.51
			1.6	0.62	0.57
			1.8	0.67	0.62
			2	0.75	0.67
		0.1	1	0.43	0.38
			1.2	0.45	0.42
			1.4	0.52	0.50
			1.6	0.57	0.52
			1.8	0.63	0.57
			2	0.71	0.66

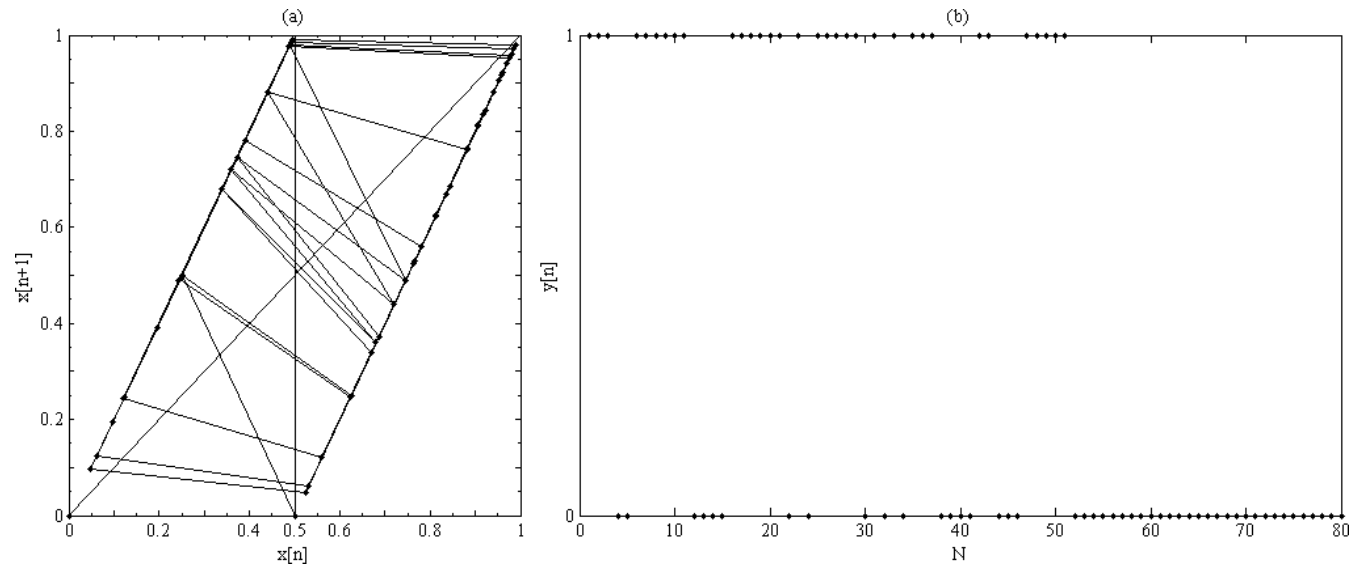


Figura 2: Comportamiento del modelo propuesto considerando $N = 1000$ iteraciones, $d = 0.5$ y $m = 1$.

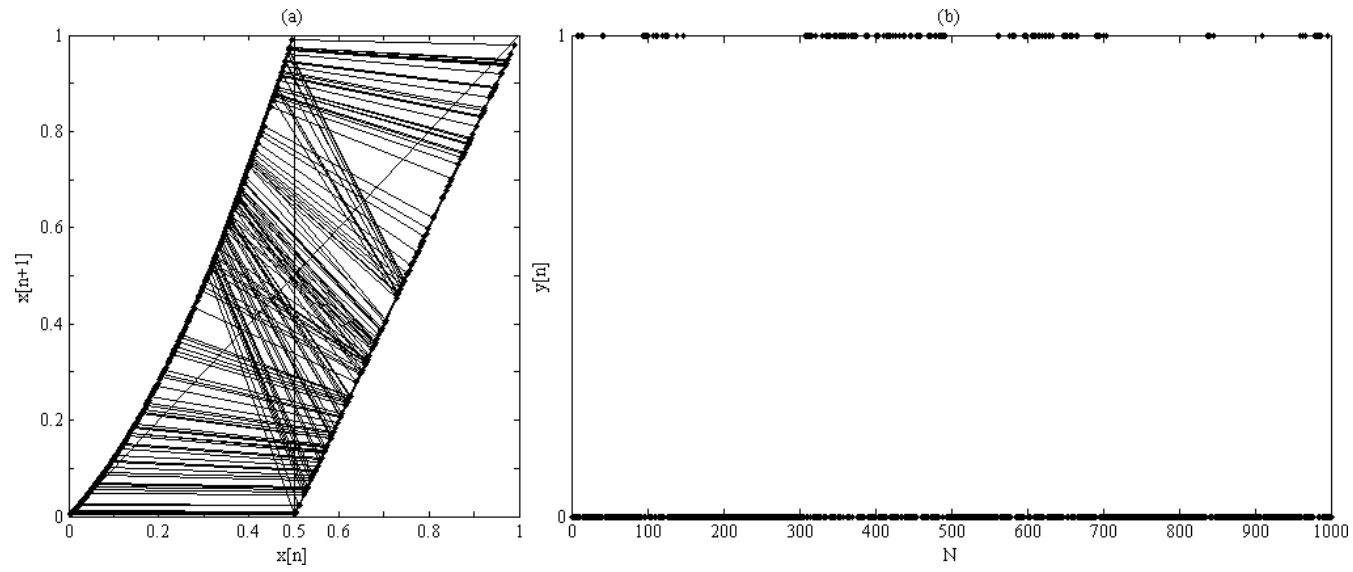


Figura 3: Comportamiento del modelo propuesto considerando $N = 1000$ iteraciones, $d = 0.5$ y $m = 2$.

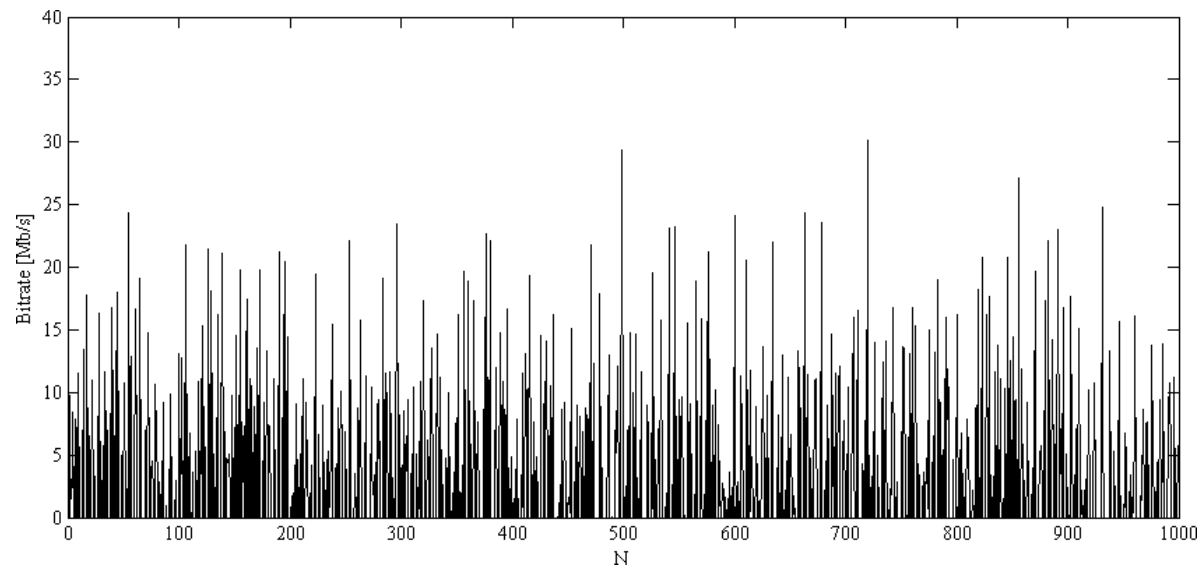


Figura 4: Aspecto gráfico del tráfico generado por el mapa de parámetros $m = 2$ y $d = 0.5$ considerando $N = 1000$ iteraciones (ver Figura 2).

5. Discusión de Resultados

El modelo caótico propuesto demuestra que la generación de tráfico autosimilar LRD puede ser abordada a partir del control de los parámetros m y d para una cantidad fija de iteraciones, lo cual queda en evidencia con los resultados expuestos en la Tabla 2. Sin embargo, producto de lo simplificada de su actual formulación, no es posible aun controlar los tiempos de permanencia del mapa en cada estado. Al respecto, un modelo más general como el que se reporta en Pruthi and Erramilli (1995) si permite tal labor y con buena exactitud. Un ejemplo simple que ilustra esta necesidad se construye sobre la base de requerir que el tráfico presente en un sistema se encuentre entorno a cierto grado de autosimilitud, por ejemplo $H = 0.9$. Comprobando la Tabla 2 se encuentra que este requerimiento solo puede ser satisfecho a partir de un cambio del límite de las regiones de iteración, d , hecho bastante poco práctico debido a sus repercusiones sobre la función indicadora. Luego, se trata de una necesidad que requiere atención urgente.

El control del grado de autosimilitud del tráfico generado por el modelo es efectivo para las series temporales subyacentes. En este respecto, el análisis de los resultados expuestos en la Tabla 3 resulta fundamental puesto que refleja la problemática de fondo: controlar el efecto de la localidad del exponente de Hurst. De ella se observa que las trazas formadas a partir de tramos aleatorios de las muestra originales reflejan el comportamiento del total y que, además, el exponente de Hurst puede ser considerado como un indicador completamente válido para caracterizar los efectos que posee el tráfico autosimilar con LRD sobre el rendimiento de los sistemas de colas. Sin embargo, se reconoce, con respecto a esta afirmación, la falta de una demostración matemática formal, pero en una primera instancia y en atención a los efectos que la función indicadora posee sobre la percepción del sistema, si se encuentra una fundamentación apropiada.

6. Conclusiones

Se ha presentado una extensión cualitativa y cuantitativa de los modelos caóticos generadores de tráfico autosimilar LRD con la incorporación de un nuevo y simple modelo de mapa caótico afin por tramos (PWA) unidimensional que entrega una explicación válida a la problemática de la localidad del exponente de Hurst.

Se comprueba la factibilidad de contar con un generador de tráfico autosimilar LRD eficiente a partir de la parsimonia de su modelo; hecho que se evidencia a través de un adecuado control del valor del exponente de Hurst.

Se propone y fundamenta que el exponente de Hurst puede ser considerado por si mismo como único parámetro representativo del comportamiento autosimilar LRD de los flujos de tráfico.

Se demuestra que el valor que el exponente de Hurst exhibe en la desagregación de series temporales autosimilares LRD depende fuertemente del modelo de origen del tráfico considerado.

Sobre la base de subconjuntos de muestras aleatorias obtenidas con el modelo se observa que el valor del exponente de Hurst es tendiente a mantener su valor con respecto a las series totales no desagregadas y caracteriza adecuadamente a los segmentos.

Finalmente, el hecho más relevante para el desarrollo futuro de esta investigación es la demostración práctica de que $m = 1$ debe descartarse como opción para formular un mapa PWA generador de tráfico autosimilar LRD, puesto que implica la aparición de tráfico con SRD, lo cual queda en evidencia con los resultados expuestos en las Tablas 2 y 3. Luego se descarta la opción de trabajar con un modelo puramente lineal.

English Summary

Generation and characterization of self-similar teletraffic using a new model of piecewise affine chaotic one-dimensional map.

Abstract

This paper presents a qualitative and quantitative extension of the chaotic models used to generate and characterize self-similar traffic with long range dependence (LRD) in high-speed computer networks by means of the formulation of a new model that considers the use of piecewise affine (PWA) one-dimensional maps. Based on the disaggregation of the temporal series generated, an explanation of the behavior of the values of Hurst's exponent (H) is proposed and the feasibility of their control from the parameters of the proposed model is shown.

Keywords:

Self-similarity, long-range dependence (LRD), Hurst exponent (H), chaotic maps, teletraffic models.

Referencias

- Aklilu, G., Pitts, J.M., and Mondragón, R.J., 2001. Modelling the bounds on LRD behavior for IP traffic. Proc. PG Net 2001 Symposium [Online]. Available: <http://www.cms.livjm.ac.uk/pgnet2001/papers/GAklilu.pdf>
- Arrowsmith, D.K., Barenco, M., Mondragon, R.J., and Woolf, M., 2004. The statistics of intermittency maps and dynamical modeling of networks. Proc. 6th Int. Symp. Math. Theory Networks and Systems [Online]. Available: <http://maths.qmul.ac.uk/~arrow/THA7ID273.pdf>
- Arlitt, M., and Jin, T., 2000. Workload characterization of the 1998 world cup web site. IEEE Network, vol. 14, no. 3, pp. 30-37. DOI: 10.1109/65.844498
- Beran, J., Sherman, R., Taqqu, M.S., and Willinger, W., 1995. Long-range dependence in variable bit-rate video traffic. IEEE Trans. Commun., vol. 43, no. 234, pp. 1566-1579. DOI: 10.1109/26.380206
- Crovella, M.E., and Bestavros, A., 1997. Self-similarity in World Wide Web traffic: evidence and possible causes. IEEE/ACM Trans. Netw., vol. 5, no. 6, pp. 835-846. DOI: 10.1109/90.650143
- Davies, R.B., and Harte, D.S., 1987. Test for Hurst effect. Biometrika, vol. 74, no. 1, pp. 95-101. DOI: 10.1093/biomet/74.1.95
- Ding, M., and Yang, W., 1995. Distribution of the first return time in fractional Brownian motion and its application to the study of on-off intermittency. Physical Review E, vol. 52, no. 1, pp. 207-213. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.207
- Duffy, D.E., McIntosh, A.A., Rosenstein, M., and Willinger, W., 1994. Statistical analysis of CCSN/SS7 traffic data from working CSS subnetworks. IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 12, no. 3, pp. 544-551. DOI: 10.1109/49.285297
- Erramilli, A., Singh, R.P., and Pruthi, P., 1994a. Chaotic maps as models of packet traffic. In: Labetoulle, J., and Roberts, J.W. (Eds.), The fundamental role of teletraffic in the evolution of telecommunications networks. Elsevier, Amsterdam, pp. 329-338.
- Erramilli, A., Singh, R.P., and Pruthi, P., 1994b. Modeling packet traffic with chaotic maps. Tech. Rep. ISRN KTH/IT/R-94/18-SE. KTH Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden.
- Erramilli, A., Singh, R.P., and Pruthi, P., 1995. An application of deterministic chaotic maps to model packet traffic. Queueing Systems, vol. 20, no. 1-2, pp. 171-206. DOI: 10.1007/BF01158436

- Fantacci, R., and Tarchi, D., 2006. Bridging solutions for a heterogeneous WiMAX-WiFi scenario. *Journal of Communications and Networks*, vol. 8, no. 4, pp. 369-377.
- Floyd, S., and Paxson, V., 2001. Difficulties in simulating the Internet. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 9, no. 4, pp. 392-403. DOI: 10.1109/90.944338
- Gao, J.B., and Rubin, I., 1999. Multifractal analysis and modeling of long-range dependent network traffic. 1999 IEEE Int. Conf. Commun., vol. 1, pp. 382-386. DOI: 10.1109/ICC.1999.767967
- Gao, J.B., 2000. Multiplicative multifractal modeling of long-range dependent (LRD) traffic in computer communications networks. Ph.D. dissertation, Elect. Eng. Dept, University of California, Los Angeles, CA.
- Gao, J.B., and Rubin, I., 2001. Multifractal modeling of counting processes of long-range dependent network traffic. *Comput. Commun.*, vol. 24, no. 14, pp. 1400-1410. DOI: 10.1016/S0140-3664(01)00297-3
- Garret, M.W., and Willinger, W., 1994. Analysis, modeling and generation of self-similar VBR video traffic. *Comput. Commun. Rev.*, vol. 24, no. 4, pp. 269-280. DOI: 10.1145/190809.190339
- Ge, A., Callegati, F., and Tamil, L., 2000. On optical burst switching and self-similar traffic. *IEEE Commun. Lett.*, vol. 4, no. 3, pp. 98-100. DOI: 10.1109/4234.831037
- Just, W., 1995. Bifurcations in globally coupled map lattices. *J. Stat. Physics*, vol. 79, no. 1, pp. 429-449. DOI: 10.1007/BF02179397
- Huang, A., Xie, L., Li, Z., Lu, D., and Ho, P.H., 2005. Optical self-similar cluster switching (OSCS) – a novel optical switching scheme by detecting self-similar traffic. *Photonic Network Communications*, vol. 10, no. 3, pp. 297-308. DOI: 10.1007/s11107-005-3492-y
- Huang, A., Mukherjee, B., Xie, L., and Li, Z., 2007. Time-space label switching protocol (TSL-SP). In: Elhanany, I., and Hamdi, M. (Eds.), *High performance packet switching architectures*. Springer, Germany, pp. 197-210.
- Heffes, H., and Lucantoni, D., 1986. A Markov modulated characterization of packetized voice and data traffic and related statistical multiplexer performance. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 4, no. 6, pp. 856-868. DOI: 10.1109/JSA.1986.1146393
- Klages, R., 2002. Comment on “analysis of chaotic motion and its shape dependence in a generalized piecewise linear map”. *Physical Review E*, vol. 66, pt. 2, no. 1, pp. 018201.1-018201.3. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.018201
- Kellert, S.H., 1993. *In the wake of chaos: unpredictable order in dynamical systems*. The University of Chicago Press, Chicago, IL, p. 2.
- Leland, W.E., Taqqu, M.S., Willinger, W., and Wilson, D.V., 1994. On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version). *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 2, no. 1, pp. 1-15. DOI: 10.1109/90.282603
- Liang, Q., 2002. Ad hoc wireless network traffic. Self-similarity and forecasting. *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 7, pp. 297-299. DOI: 10.1109/LCOMM.2002.801327
- Luengo, D., 2006. Estimación de secuencias caóticas con aplicación en comunicaciones. Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Cantabria. Cantabria, España.
- Maier, M., 2008. *Optical switching networks*. Cambridge University Press, New York.
- Mahner, M., and Bunge, M., 2000. *Fundamentos de biofilosofía*. Editorial Siglo Veintiuno. México, pp. 220-221.
- Male, S., 1998. Finding a horseshoe on the beaches of Rio. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, no. 1, pp. 39-44. DOI: 10.1007/BF03024399
- Mandelbrot, B.B., and Van Ness, W., 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, vol. 10, no. 4, pp. 427-437. DOI: 10.1137/1010093
- Mandelbrot, B.B., 1971. A first fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research*, vol. 7, no. 3, pp. 543-553. DOI: 10.1029/WR007i003p00543
- Mandelbrot, B.B., 1975. *Les objets fractals: forme, hasard and dimension*. Flammarion, Paris, France.
- Mandelbrot, B.B., 1983. *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Company, New York.
- May, R.M., 1974. Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles and chaos. *Science*, vol. 186, no. 4164, pp. 645-647. DOI: 10.1126/science.186.4164.645
- May, R.M., 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamic. *Nature*, vol. 261, no. 5560, pp. 459-467. DOI: 10.1038/261459a0
- Millán, G., Kaschel, H., and Lefranc, G., 2010. A simple model for the generation of LRD self-similar traffic using piecewise affine chaotic one-dimensional maps. *Studies in Informatics and Control*, vol. 19, no. 1, pp. 67-78.
- Mondragón, R.J., 1999. A model of packet traffic using a random wall model. *Int. J. Bifurcation and chaos*, vol. 9, no. 7, pp. 1381-1392. DOI: 10.1142/S021812749900095X
- Mondragón, R.J., Pitts, J.M., and Arrowsmith, D.K., 2000. Chaotic intermittency-sawtooth map model of aggregate self-similar streams. *Electronics Letters*, vol. 36, no. 2, pp. 184-186. DOI: 10.1049/el:20000184
- Morita, S., 1996. Bifurcations in globally coupled chaotic maps. *Physics Letters A*, vol. 211, no. 5, pp. 258-264. DOI: 10.1016/0375-9601(96)00012-6
- Neidhardt, A.L., and Wang, J.L., 1998. The concept of relevant time scales and its application to queueing analysis of self-similar traffic (or is Hurst naughty or nice?). *Performance Evaluation Rev.*, vol. 26, no. 1, pp. 222-232. DOI: 10.1145/277858.277923
- Park, K., and Willinger, W., 2000. *Self-similar network traffic and performance evaluation*. Wiley, New York.
- Paxson, V., and Floyd, S., 1995. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 3, no. 3, pp. 226-244. DOI: 10.1109/90.392383
- Paxson, V., 1997. Fast, approximate synthesis of fractional Gaussian noise for generating self-similar network traffic. *Comput. Commun. Rev.*, vol. 27, no. 5, pp. 5-18. DOI: 10.1145/269790.269792
- Pikovsky, A.S. and Kurths, J., 1994. Collective behavior in ensembles of globally coupled maps. *Physica D*, vol. 76, no. 4, pp. 411-419. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90048-5
- Pruthi, P., Erramilli, A., 1995. Heavy-tailed on/off source behavior and self-similar traffic. 1995 IEEE Int. Conf. Commun., vol. 1, pp. 445-450. DOI: 10.1109/ICC.1995.525209
- Resnick, S.I., 1997. Heavy tail modeling and teletraffic data. *Ann. Stat.*, vol. 25, no. 5, pp. 1805-1869. DOI: 10.1214/aos/1069362376
- Rose, O., 1996. Estimation of the Hurst parameter of long-range dependent time series. Technical Report no. 137. Würzburg Institute of Computer Science. University of Würzburg. [Online]. Available: <http://www3.informatik.uni-wuerzburg.de/TR/tr137.pdf>
- Rossiter, M.H., 1988. The switched Poisson process and SPP/G/1 queue. Proc. 12th International Teletraffic Congress. ITC 12, Turin, Italy. [Online]. Available: <http://www.i-teletraffic.org/fileadmin/ITCBibDatabase/1988/rossiter883.pdf>
- Ryu, B.K., and Lowen, S.B., 1996. Point process approaches to the modeling and analysis of self-similar traffic. Part I: model construction. Proc. IEEE INFOCOM '96, vol. 3, pp. 1468-1475. DOI: 10.1109/INFCOM.1996.493096
- Samuel, L.G., Pitts, J.M., and Mondragón, R.J., 1997. Fast self-similar traffic generation. Proc. 14th UK Teletraffic Symposium on Performance Engineering in Information Systems. Manchester, UK. [Online]. Available: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.36.4181>
- Samuel, L.G., Pitts, J.M., and Mondragón, R.J., 1998. Applications of non-linear dynamics to network modelling. Proc. 15th UK Teletraffic Symposium on Performance Engineering in Information Systems. Durham, UK. [Online]. Available: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.36.5787>
- Sheluhin, O.I., Smolskiy, S.M., and Osin, A.V., 2007. *Self-similar processes in telecommunications*. Wiley, Chichester, England.
- Schuster, H.G., and Just, W., 2005. *Deterministic chaos. An introduction*, 4th Ed. Wiley-VHC Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany, Ch. 3, pp. 21-26.

- Stallings, W., 2004. *Redes e internet de alta velocidad. Rendimiento y calidad de servicio*, 2nd Ed. Pearson-Prentice Hall, Madrid, España, Ch. 9, pp. 232-234.
- Tan, P.H., 1999. *Statistical analysis of long-range dependent processes via stochastic intensity approach, with applications in networking*. Ph.D. dissertation. Dept. Ind. Syst. Eng., North Carolina State Univ. Raleigh, NC.
- Tran-Gia, P., 1983. A renewal approximation for the generalized Poisson process. In: Iazeolla, G., Courtois, P.J., and Hordijk, A. (Eds.), *Proc. Int. Workshop on Computer Performance and Reliability*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 169-179.
- Tsybakov, B., and Georganas, N.D., 1997. On self-similar traffic in ATM queues: definitions, overflow probability bound, and cell delay distribution. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 5, no. 3, pp. 397-409. DOI: 10.1109/90.611104
- Wang, X.J., 1989. Statistical physics of temporal intermittency. *Physical Review A*, vol. 40, no. 11, pp. 6647-6661. DOI: 10.1103/PhysRevA.40.6647
- Willinger, W., Taqqu, M.S., and Erramilli, A., 1996. A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks. In: Kelly, F.P., Zachary, S., and Ziedins, I. (Eds.), *Stochastic networks: theory and applications*. Clarendon Press, Oxford.
- Willinger, W., Taqqu, M.S., Sherman, R., and Wilson, D.V., 1997. Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 5, no. 1, pp. 71-86. DOI: 10.1109/90.554723
- Willinger, W., 2000. The discovery of self-similar traffic. In: Haring, G., Lindemann, C., and Reiser, M. (Eds.), *Performance evaluation: origins and directions*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1769. Springer, Germany, pp. 513-527. DOI: 10.1007/3-540-46506-5_24
- Willinger, W., Paxson, V., Riedi, R., and Taqqu, M.S., 2001. Long-range dependence and data network traffic. In: Doukhan, P., Oppenheim, G., and Taqqu, M.S. (Eds.), *Theory and applications of long-range dependence*. Birkhäuser, Cambridge, MA, pp. 373-408.
- Yang, X., 2001. *Impulsive self-similar processes, with applications in broadband communication system modeling*. Ph.D. dissertation, Electrical and Computer Engineering Department. Drexel University. Philadelphia, PA.
- Yellanki, L., 1999. *Performance evaluation of VBR video traffic models*. M.S. thesis, Dept. Computer Science., Univ. Saskatchewan. Saskatoon, SK, Canada.